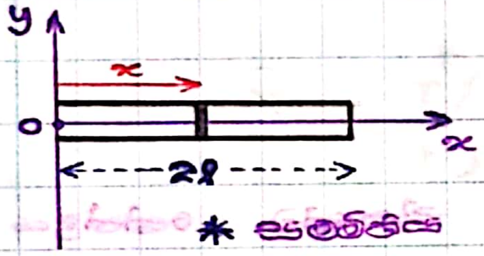
ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

01) ඒකාකාර දණ්ඩක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



* O සිට x දුරකින් වන Δx දිගක් සලකමු.

* සමමිතිය අනුව දණ්ඩේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$$\overrightarrow{OG} \equiv (\bar{x}, 0)$$

අංශුවේ ස්කන්ධය $= \rho \Delta x = m_i$

(ρ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.)

අංශුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට Ox ඔස්සේ දුර $= x = x_i$

දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට O සිට Ox ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2l} \rho . dx . x}{\int_0^{2l} \rho \, dx}$$

Scanned with CamScanner

$$\bar{x} = \frac{\rho_0 \int^{2l} x \, dx}{\rho_0 \int^{2l} dx}$$

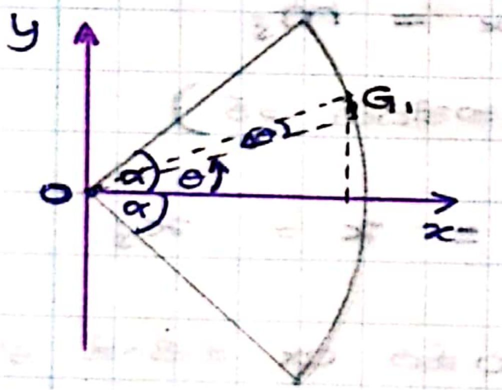
$$\bar{x} = \frac{\left[x^2/2 \right]_0^{2l}}{\left[x \right]_0^{2l}}$$

$$\bar{x} = \frac{4l^2/2 - 0}{2l - 0} = \frac{2l^2}{2l}$$

$$\bar{x} = l$$

* ඒකාකාර සිහින් දණ්ඩේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටයි.

02) ඒකාකාර සිහින් චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



* කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන චාපයක් (අරය r වන) සලකමු.

* Ox ට චාපය සමමිතික නිසා චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$$\overrightarrow{OG} = (\bar{x}, 0)$$

* Ox ට θ කෝණයකින් ආනතික ලක්ෂ්‍යයේ Δθ ආපාතික චාප කොටස සලකමු.

පුංචුවේ දිග (කුඩා චාපයේ දිග) $= r\Delta\theta$

ඒකක දිගක ස්කන්ධය ρ ලෙස ගනිමු.

කුඩා චාපයේ ස්කන්ධය $= r.\Delta\theta.\rho = m_i$

කුඩා චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $= r\cos\theta = x_i$

* චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta \cdot \rho \cdot r\cos\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta \cdot \rho}$$

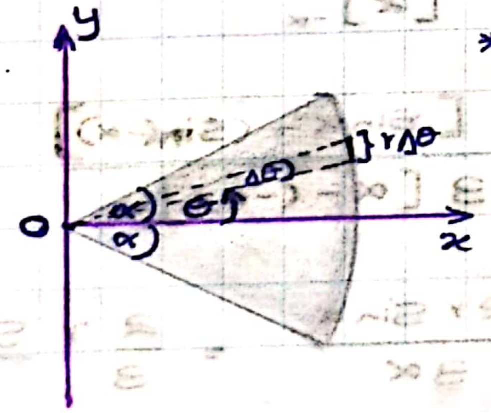
$$\bar{x} = \frac{r^2\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{r\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{r\,[\sin\alpha - \sin(-\alpha)]}{\alpha - (-\alpha)}$$

$$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{2\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

03) කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



* කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන අරය r කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් සලකමු.

* සමමිතිය නිසා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OX මත පිහිටයි.

$$\overrightarrow{OG} = (\bar{x}, 0)$$

Scanned with CamScanner

OX ට θ කෝණයකින් ආනතිව රේඛාවේ Δθ කෝණයක් ආපාතිත සහිත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය සලකමු.

එවිට කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} r\Delta\theta \times r$

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය ρ ලෙස ගනිමු.

එවිට කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ ස්කන්ධය $= \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta . \rho = m_i$

එවිට කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $= \frac{2}{3} r\cos\theta = x_i$

චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} r^2 . d\theta . \rho . r\cos\theta \times \frac{2}{3}}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} r^2 \rho \, d\theta}$$

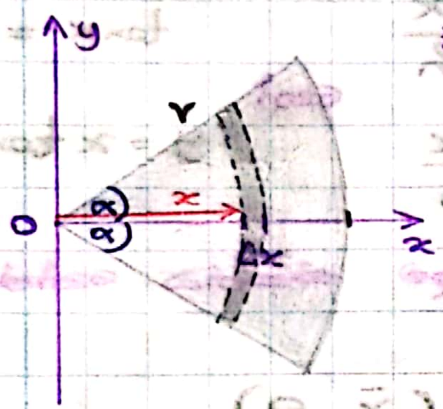
$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2} r^3 \times \frac{2}{3} \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta . d\theta}{\frac{1}{2} r^2 \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{2r}{3} \frac{[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$\bar{x} = \frac{2r[\sin\alpha - \sin(-\alpha)]}{3[\alpha - (-\alpha)]}$$

$$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඇසුරින් ගණනය කරමු ......



* සමමිතික නිසා ඛණ්ඩයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$$G \equiv (\bar{x}, 0)$$

O සිට x දුරින් ඇති Δx ඝනකම චාපය සලකමු.

චාපයේ වර්ගඵලය $= x \cdot 2\alpha \, \Delta x$

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය ρ නම්,

චාපයේ ස්කන්ධය $= 2\alpha \cdot x \cdot \Delta x \cdot \rho = m_i$

චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $= \dfrac{x \sin\alpha}{\alpha} = x_i$

කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX දුර $\bar{x}$ නම්,

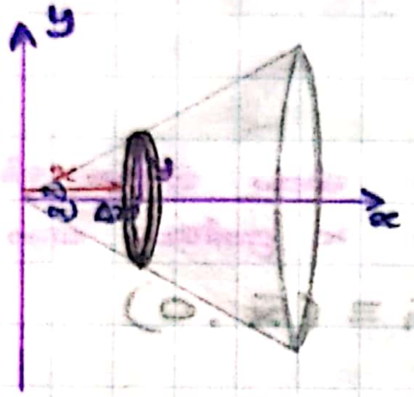
$$\bar{x} = \frac{\int_0^r 2\alpha \cdot x \cdot \rho \cdot x \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \, dx}{\int_0^r 2\alpha \cdot x \cdot \rho \, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{2\alpha \cdot \rho \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \int_0^r x^2 \, dx}{2\alpha \cdot \rho \int_0^r x \, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\left[x^3/3\right]_0^r}{\left[x^2/2\right]_0^r} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{r^3}{3} - 0}{\frac{r^2}{2} - 0}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

04) ඝන කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



* අරය r උස h කේතුවක් සලකමු

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$y = \frac{rx}{h} \quad \text{හෝ} \quad y = x\tan\alpha$$

* සමමිතිය අනුව කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$$G \equiv (\bar{x}, 0)$$

O සිට x දුරකින් ඝනකම Δx වන තැටියක් සලකමු.

තැටියේ පරිමාව $= \pi y^2 \Delta x = \pi \left[\frac{rx}{h}\right]^2 \Delta x$

ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය ρ ලෙස ගනිමු.

තැටියේ ස්කන්ධය $= \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \Delta x \, \rho = m_i$

තැටියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට
O සිට OX අක්ෂයේ දුර $= x = x_i$

කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \rho \, dx \cdot x}{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \rho \, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[x^4/4\right]_0^h}{\left[x^3/3\right]_0^h} = \frac{h^4/4 - 0}{h^3/3}$$

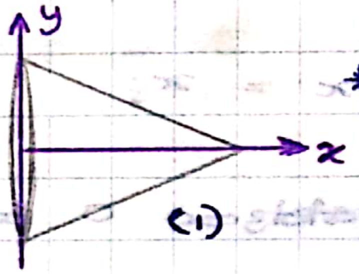
$$\bar{x} = \frac{3h}{4}$$

ඝන කේතුවක පරිමාව සොයමු. ——...

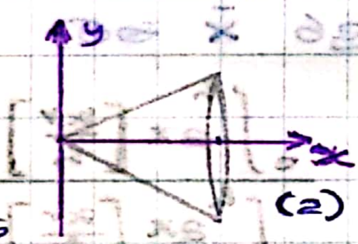
කේතුවෙහි පරිමාව $= \int_0^h \pi \left[\frac{rx}{h}\right]^2 dx$

$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$= \frac{\pi r^2 h}{3}$

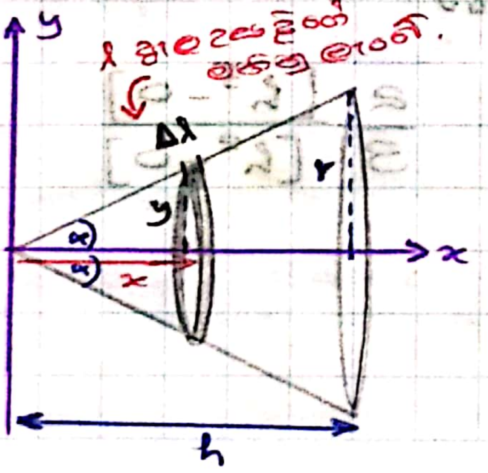


* මෙලෙස ගෙන ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සෙවීමේදී අනුකලන කිරීම ඉතා ක්‍රමයට වඩා අපහසු වේ.



∴ අනුකලනය මගින් කේතුවෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සෙවීමේදී (2) රූපයේ පරිදි රූපය ගෙන විසඳීම ඉතා පහසු වේ.

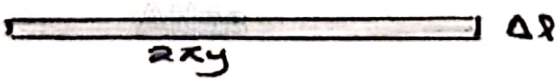
05) කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



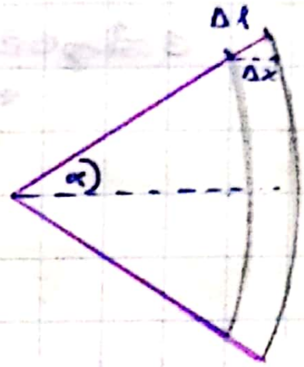
* අරය r හා උස h වූ කුහර කේතුවක් සලකමු.

සමමිතිය අනුව කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$G \equiv (\bar{x}, 0)$



O සිට x දුරින් වන පළල Δl වන වළල්ලක් සලකමු.



වළල්ලේ වර්ගඵලය $= 2\pi y\,\Delta l$

$= 2\pi y \cdot \Delta x \, Sec\alpha$

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය ρ ලෙස ගනිමු.

වළල්ලේ ස්කන්ධය $= 2\pi\left[\frac{xr}{h}\right]\Delta x \cdot Sec\alpha\,\rho$

$= m_i$

$\Delta x = \Delta l \, Cos\,\alpha$

$\Delta l = \Delta x \, Sec\,\alpha$

වළල්ලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට Ox අක්ෂයේ දුර $x = x_i$

කුහර කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට Ox අක්ෂයේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h 2\pi\left[\frac{xr}{h}\right] dx \cdot Sec\alpha \cdot \rho \cdot x}{\int_0^h 2\pi\left[\frac{xr}{h}\right] dx \cdot Sec\alpha \cdot \rho}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{2\pi r}{h}\rho\, Sec\alpha \int_0^h x^2\, dx}{\frac{2\pi r}{h}\rho\, Sec\alpha \int_0^h x\, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[x^3/3\right]_0^h}{\left[h^2/2\right]_0^h} = \frac{2}{3}\cdot\frac{[h^3-0]}{[h^2-0]}$$

$$\bar{x} = \frac{2h}{3}$$

කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයමු

කේතුවේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \int_0^h 2\pi\left[\frac{xr}{h}\right] . dx \sec\alpha$

$= \frac{2\pi r}{h} \sec\alpha . \int_0^h x \, dx$

$= \frac{2\pi r}{h} \sec\alpha \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$

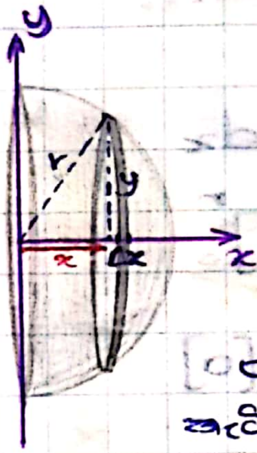
$= \frac{2\pi r}{h} \sec\alpha . \frac{1}{2}\left[h^2 - 0\right]$

මෙහි $l = h\sec\alpha$ වේ.

$= \pi r h \sec\alpha$

$= \pi r l$

08) ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



සමමිතිය අනුව අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$\overrightarrow{OG} \equiv (\bar{x}, 0)$

$y^2 = r^2 - x^2$ වේ.

O සිට x දුරින් වූ ඝනකම Δx වන කැටියක් සලකමු.

කැටියේ ස්කන්ධය $= \pi(r^2 - x^2)\Delta x . \rho = m_i$

කැටියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට Ox ඔස්සේ දුර $= x = x_i$

අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{x}$ නම්,

Scanned with CamScanner

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, dx \cdot \rho \cdot x}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2) dx \cdot \rho}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi \rho \int_0^r (r^2 - x^2) x \cdot dx}{\pi \rho \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[r^2 \cdot x^2/2 - x^4/4 \right]_0^r}{\left[r^2 x - x^3/3 \right]_0^r}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[r^4/2 - r^4/4 \right]}{\left[r^3 - r^3/3 \right]} = \frac{r^4/4}{2r^3/3}$$

$$\bar{x} = \frac{3r}{8}$$

ගෝලයේ පරිමාව සොයමු. ...

අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව $= \int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, dx$

$= \pi \left[r^2 x - x^3/3 \right]_0^r$

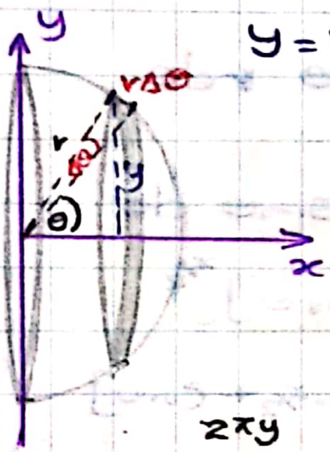
$= \pi \left[r^3 - r^3/3 \right] - [0]$

$= \frac{2\pi r^3}{3}$

∴ ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4\pi r^3}{3}$

Scanned with CamScanner

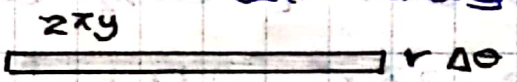
07) කුහර අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



සමමිතිය අනුව කුහර අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

$$G \equiv (\bar{x}, 0)$$

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය ρ ලෙස ගනිමු.



වළල්ලේ වර්ගඵලය $= 2\pi(r\sin\theta).r\Delta\theta$

වළල්ලේ ස්කන්ධය $= 2\pi r^2 \sin\theta \, \Delta\theta \, \rho = m_i$

වළල්ලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $= r\cos\theta = x_i$

කුහර අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin\theta \, \rho \, d\theta \, . \, r\cos\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin\theta \, \rho \, d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi r^3 \rho \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta}{2\pi r^2 \rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{r}{2} \frac{\left[-\cos 2\theta/2\right]_0^{\pi/2}}{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}} = \frac{r[-\cos\pi + \cos 0]}{4[-\cos\pi/2 + \cos 0]}$$

$$\bar{x} = \frac{r}{4}\frac{[+1+1]}{[0+1]} = \frac{r}{2}$$

Scanned with CamScanner

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයමු ...

අර්ධ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \int_0^{\pi/2} 2\pi r \sin\theta \cdot r\, d\theta$

$= 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta$

$= 2\pi r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= 2\pi r^2 \left[-\cos\pi/2 + \cos 0\right]$

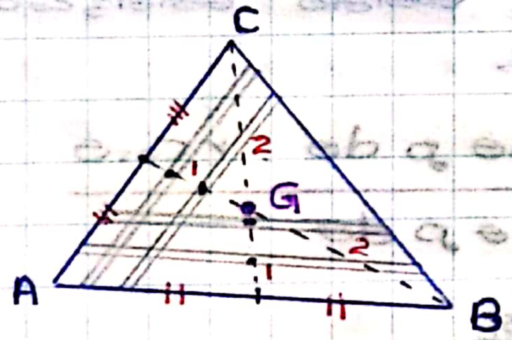
$= 2\pi r^2 \left[-0 + 1\right]$

$= 2\pi r^2$

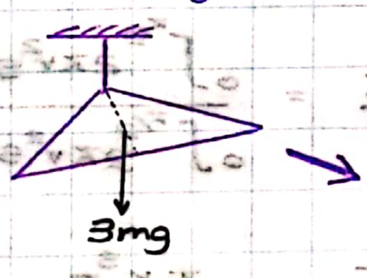
$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 2\pi r^2 \times 2$

$= 4\pi r^2$

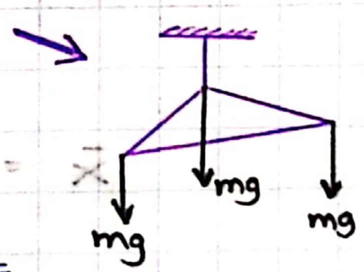
08) ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය



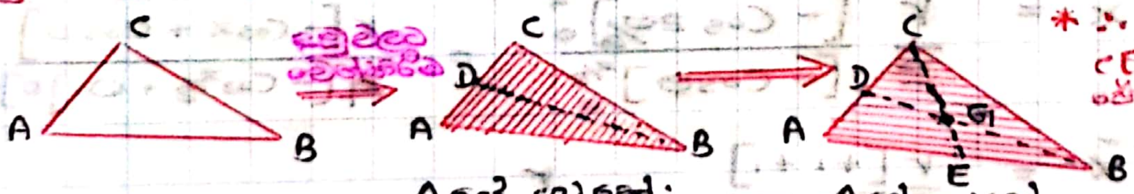
* තවද,



ලෙස දැක්විය හැකිය.



* සාමාන්‍ය Δයක් සැලකූ විට එහි ආධාරයට සමාන්තරව ඒවා සැලකීමෙන් ලබා ගත හැකි තීරු රාශියක සමුච්චය ලෙස සැලකිය හැකි වේ.



Δයේ ගු.කේ. BD රේඛාව මත පිහිටිය යුතුය.

Δයේ ගු.කේ. CE රේඛාව මත පිහිටිය යුතුය.

* ∴ මෙහි BD හා CE රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ Δයේ ගු.කේ. පිහිටයි.

පෘ.පි.බ.:

* CE හා BD රේඛා Δයේ මධ්‍යස්ථ වන නිසාවද මධ්‍යස්ථ වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රකය වන නිසාද Δයේ ගු:කේ: කේන්ද්‍රකය මත පිහිටයි. එවිට ගු:කේ: මගින් මධ්‍යස්ථ 2:1 ට බෙදෙයි.

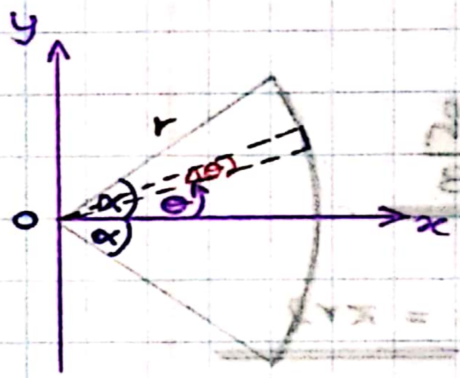
සංයුක්ත වස්තුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය,

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2}{m_1 + m_2}$$

ශේෂ වස්තුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය,

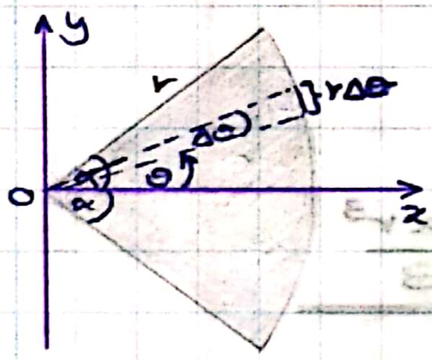
$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 - m_2\bar{x}_2}{m_1 - m_2}$$

ඒකාකාර සිහින් චාපයක



$$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක

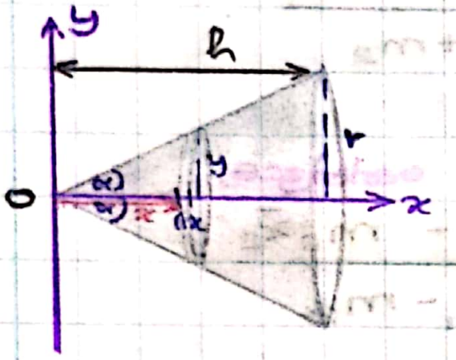


$$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$$

වර්ගඵලය $= \frac{2\alpha}{2\pi} \times \pi r^2$

$= \alpha r^2$

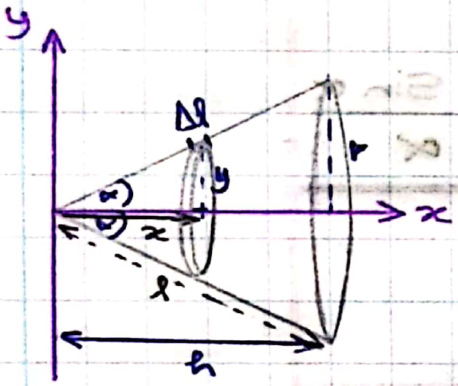
ඝන කේතුවක



$$\bar{X} = \frac{3h}{4}$$

$$පරිමාව = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

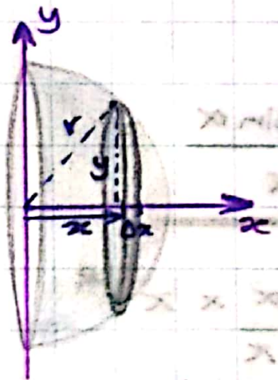
කුහර කේතුවක



$$\bar{X} = \frac{2h}{3}$$

$$වර්ගඵලය = \pi r l$$

ඝන අර්ධ ගෝලයක



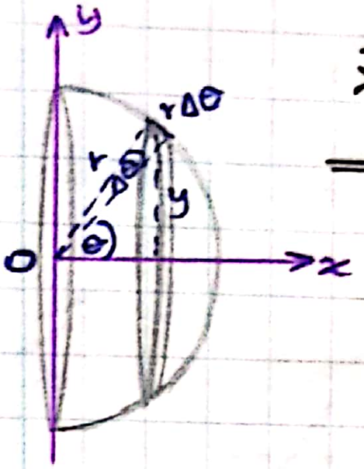
$$\bar{X} = \frac{3r}{8}$$

$$පරිමාව = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$ගෝලයක\ පරිමාව = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Scanned with CamScanner

කුහර අර්ධ ගෝලය



$$\bar{x} = \frac{r}{2}$$

වර්ගඵලය

$$= 2\pi r^2$$